

Transformations canoniques

La transformation entre (q, p) et (f_+, f_-) qu'on a trouvée pour l'oscillateur harmonique est telle que :

$$\{q, p\} = 1$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

La structure
canonique est
préservée
on l'appelle
TRANSFORMATION
CANONIQUE

$$\{f_+, f_-\} = 1$$

$$\begin{cases} \dot{f}_+ = \frac{\partial K}{\partial f_-} = 0 \\ \dot{f}_- = -\frac{\partial K}{\partial f_+} = 0 \end{cases}$$

$$K = \text{const.}$$

Plus généralement, on cherche les règles pour faire une transformation du type

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \\ P_i = P_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \end{cases}$$

telle que

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases} \quad \forall i$$

On va demander que les
équations qu'on trouve soient
simples plus tard

Pour le faire on passe par le principe de moindre action et on profite de l'invariance de jauge.

Par rappel, l'action est

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) dt$$

On procède par étapes (attention : passages symboliques !)

①

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

$$\Rightarrow L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$$

②

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \right] dt$$

avec $\{q_i(t_1)\}, \{q_i(t_2)\}$
 $\{p_i(t_1)\}, \{p_i(t_2)\}$
 connus.

On montre ici que, formulée de cette façon, l'action mène aux équations canoniques de Hamilton :

$$\frac{\delta S}{\delta p_e(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \underbrace{\frac{\delta p_i}{\delta p_e}}_{\delta_{ie} \delta(t-t')} \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_e} \delta(t-t') \right] dt'$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t') \left[\dot{q}_e - \frac{\partial H}{\partial p_e} \right] dt' = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{q}_e = \frac{\partial H}{\partial p_e}}$$

$$\frac{\delta S}{\delta q_e(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \frac{\delta \dot{q}_i}{\delta q_e} - \frac{\partial H}{\partial q_e} \delta(t-t') \right] dt' = 0$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \frac{d}{dt} (\delta_{ie} \delta(t-t')) - \frac{\partial H}{\partial q_e} \delta(t-t') \right] dt' =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\underbrace{-\sum_i \frac{dp_i}{dt} \delta_{ie} \delta(t-t')}_{\text{par partie}} - \frac{\partial H}{\partial q_e} \delta(t-t') \right] dt' =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t') \left[-\dot{p}_e - \frac{\partial H}{\partial q_e} \right] dt' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{p}_e = - \frac{\partial H}{\partial q_e}}$$

Donc l'idée est que $\{p_i\}$ et $\{q_i\}$ sont les deux variables à "changer" pour chercher le minimum de S .

③ On veut faire le changement de variables $(\{q_i\}, \{p_i\})$ vers $(\{Q_i\}, \{P_i\})$ sans changer la physique (car bien évidemment le système reste le même).

Donc :

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) + \frac{d}{dt} F(\{Q_i\}, \{P_i\}, \{q_i\}, \{p_i\}, t)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{array} \right.$

structure nécessaire pour avoir

pas de $\{\dot{q}_i\}, \{\dot{p}_i\}, \{Q_i\}$ et $\{P_i\}$

dérivée totale compatible avec l'invariance de jauge

Mais

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Donc, en remettant tout ensemble :

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \dot{q}_i - H &= \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \\ &+ \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}$$

et il faut identifier les différents termes :

On a typiquement 4 choix (dans la tradition).

$$\textcircled{1} \quad F(\{q_i\}, \{p_i\}, \{Q_i\}, \{P_i\}, t) = F_1(\{q_i\}, \{Q_i\}, t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_i} = 0 \quad \frac{\partial F_1}{\partial P_i} = 0$$

On reste avec

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Alors les termes soulignés avec les mêmes couleurs

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \dot{q}_i &= \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{array} \right. \quad \forall i \\ \sum_i P_i \dot{Q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i &= 0 & \Rightarrow & \end{aligned}$$

et enfin

$$-H = -K + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Pour resumer on trouve qu'il y a une transformation canonique (elle l'est par construction car il vient de la forme du Lagrangien, $\sum_i p_i \dot{q}_i - H$) si, donnée une fonction $F_1(\{q_i\}, \{Q_i\}, t)$, on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{array} \right. \quad \text{qui veut dire} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i = p_i(\{q_i\}, \{Q_i\}, t) \\ P_i = P_i(\{q_i\}, \{Q_i\}, t) \end{array} \right.$$

inversion de ces relations pour expliciter $\{Q_i\}$ et $\{P_i\}$ donne

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \\ P_i = P_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{et, si necessaize,} \\ \text{l'inverse} \end{array} \quad \begin{cases} q_i = q_i(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) \\ p_i = p_i(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) \end{cases}$$

et

$$K = H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) + \frac{\partial F_2(\{q_i\}, \{Q_i\}, t)}{\partial t} = K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t)$$

Example

$$\begin{cases} f_+ = Q = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} (P + im\omega q) e^{-i\omega t} \\ f_- = P = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} (P - im\omega q) e^{+i\omega t} \end{cases} \quad \text{d'ja rencontré !}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} Q - im\omega q$$

$$P = \underbrace{e^{+2i\omega t} Q - \sqrt{\frac{im\omega}{2}} e^{+i\omega t} q}_{\frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} P(Q, q, t)} - \sqrt{\frac{im\omega}{2}} e^{+i\omega t} q =$$

$$= e^{2i\omega t} Q - \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} q = P$$

Mais

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = P = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} Q - im\omega q$$

$$\Rightarrow \text{par integration} \quad F_2(q, Q, t) = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} q Q - \frac{1}{2} im\omega q^2 + g(Q, t)$$

Aussi

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P = -e^{2i\omega t} Q + \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} q$$

$\Rightarrow$ par integration

$$F_2(q, Q, t) = -\frac{1}{2} e^{2i\omega t} Q^2 + \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} q Q + h(q, t)$$

et par comparaison des

$$F_2(q, Q, t) = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} q Q - \frac{1}{2} i m \omega q^2 + g(Q, t)$$

$$F_2(q, Q, t) = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} q Q \left[-\frac{1}{2} e^{2i\omega t} Q^2 + h(q, t) \right]$$

et finalement

$$F_1(q, Q, t) = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} q Q - \frac{1}{2} i m \omega q^2 - \frac{1}{2} e^{2i\omega t} Q^2$$

Donc on a

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Il nous faut encore $q = q(Q, P, t)$. On rappelle que

$$P = e^{2i\omega t} Q - \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} q$$

d'où on a

$$q = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} e^{+i\omega t} Q - \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} e^{-i\omega t} P = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} [e^{i\omega t} Q - e^{-i\omega t} P]$$

Aussi, il nous faut $p = p(Q, P, t)$. On sait que

$$p = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} Q - i m \omega q$$

qui devient

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} Q - \sqrt{\frac{i m \omega}{2}} e^{i\omega t} Q + \sqrt{\frac{i m \omega}{2}} e^{-i\omega t} P = \\ &= \sqrt{\frac{i \omega m}{2}} \left[e^{i\omega t} Q + e^{-i\omega t} P \right] = P \end{aligned}$$

Donc l'Hamiltonien est :

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

qui devient

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left\{ \frac{i \omega m}{2} \left(e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 + 2PQ \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} m \omega^2 \left\{ \frac{1}{2m\omega i} \left(e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 - 2PQ \right) \right\} = \\ &= \frac{\omega}{4} \left[i \left(e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 + 2PQ \right) + \right. \\ &\quad \left. - i \left(e^{2i\omega t} Q^2 + e^{-2i\omega t} P^2 - 2PQ \right) \right] = i\omega PQ \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$F_1(q, Q, t) = \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} q Q - \frac{1}{2} m \omega i q^2 - \frac{1}{2} e^{2i\omega t} Q^2$$

et

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = i\omega \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} q Q - i\omega e^{2i\omega t} Q^2$$

et en y substituant $q = \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} [e^{i\omega t} Q - e^{-i\omega t} P]$

on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = i\omega \sqrt{2m\omega i} e^{i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2m\omega i}} [e^{i\omega t} Q - e^{-i\omega t} P] Q +$$

$$- i\omega e^{2i\omega t} Q^2 =$$

$$= i\omega e^{2i\omega t} Q^2 - i\omega Q P - i\omega e^{2i\omega t} Q^2 = -i\omega Q P$$

et finalement

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = i\omega P Q - i\omega Q P = 0$$

Donc $K = \text{constante}$ et, comme prouvé :

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \end{cases}$$

donc Q et P sont
des quantités conservées.

